ECUACIONES DIFERENCIALES

DEFINICIÓN

Ecuación Diferencial es una ecuación que contiene las derivadas o diferenciales de una función de una o más variables.

1. Si hay una sola variable independiente, las derivadas son ordinarias y la ecuación se llama Ecuación Diferencial Ordinaria.
2. Si hay dos o más variables independientes, las derivadas, son derivadas parciales y la ecuación se lama Ecuación Diferencial Parcial.

EJEMPLOS:

1. $\ddot{X} + P2X = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = 5 + X$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3dy}{dx} + 2y = 0$
4. $xy' + y = 3$
5. $y''' + 2(y'')^2 + y' = Cosx$
6. $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$
7. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial u}{\partial x^2}$ (Ecuación de la Onda)
8. $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{dz}{dy}$
9. $\frac{\partial^2 z}{dx^2} + \frac{\partial^2 z}{dy^2} = x^2 + y^2$

ORDEN DE UNA ECUACIONES DIFERENCIAL:
Es el orden de la derivada mayor comprometida en la ecuación.

EJEMPLOS:

1. Son de Primer Orden: 2 - 4 – 8
2. Son de Segundo Orden: 1 – 3 – 6 – 7 – 9
3. Son de Tercer Orden: 5

GRADO DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

El Grado de una ecuación diferencial que puede escribirse como un polinomio respeto a las derivadas es el grado de la derivada de mayor orden que interviene en ella.

EJEMPLOS:

1. Son de Primer Grado: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9
2. Son de Segundo Grado: 6

NOTA:
Una ecuación diferencial ordinaria de orden n tiene la forma:
$F\ (x; y, y', y'', y''', \ldots y^n) = 0$

EJEMPLOS:

Colocar el orden y grado de las ecuaciones:

	Orden	Grado
1. $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} + xy = \text{senx}$	2	3
2. $\frac{d^4x}{dt^4} = \sqrt{x+t}$	4	1
3. $\ddot{x} + \frac{2t}{\ddot{x}} = x$	2	2
4. $\text{Ln } y' + xy^2 = e^x$	1	No Definida
5. $e^x \frac{d^2y}{dx^2} + \text{Senx}\frac{dy}{dx} = x$	2	1

CLASIFICACIÓN GENERAL

Se clasifican en:

1. **Ecuación Diferencial Lineal**

   Son aquellas que pueden escribirse en la forma:

   $$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

   $a_i(x)$: Funciones reales

2. **Ecuación Diferencial No Lineal**

   Aquella que no es lineal.

EJEMPLOS:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ .... Lineal
2. $\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = xe^x$ .... Lineal
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$ .... No Lineal
4. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$ .... No Lineal
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ .... No Lineal

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Cualquier función implícita o explícita que satisfaga la ecuación diferencial, se llama **SOLUCIÓN.**

1. La solución de una ecuación diferencial de orden ***"n"*** que contiene ***n***- constantes arbitrarias, se llama ***Solución General***.
2. La solución que se obtiene dando valores particulares a las constantes arbitrarias de una solución general se llama ***Solución Particular***.
3. La gráfica de las soluciones de una ecuación diferencial son llamadas ***Curvas Integrales***.

NOTA:

En la solución general de la ecuación diferencial no se considera las soluciones escondidas, es decir; que no están todas las soluciones.

EJEMPLOS:

1. Sea $\ddot{x} + x = 0$ ¿$x = sent$, es solución?

   $x(t) = sent$ $\qquad\qquad$ $\ddot{x} + x = -sent + sent$

   $\dot{x}(t) = cost$ $\qquad\qquad$ $= 0$

   $\ddot{x}\,(t) = -sent$ $\qquad\qquad$ $\therefore x = sent$ es solución

2. Verificar que $y_1 = e^x$ es solución de $y'' - y = 0$

   Sol:

   $y' = e^x \;\Rightarrow\; y'' - y = y'' - y_1$

   $y_1'' = e^x \qquad\qquad = e^x - e^x \;\Rightarrow\; y_1'' - y_1 = 0$

   $= 0$

   $\therefore\; y_1$ es solución

3. Demuestre que todos los miembros de la familia de funciones:

   $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$

   Son una solución de la ecuación:

   $y' = \dfrac{1}{2}(y^2 - 1)$

   Sol:

   $$y' = \frac{(1-ce^t)(1+ce^t)' - (1-ce^t)'(1+ce^t)}{(1-ce^t)^2}$$

   $$= \frac{(1-ce^t)ce^t + ce^t(1+ce^t)}{(1-ce^t)^2} = \frac{ce^t - \cancel{(ce^t)^2} + ce^t + \cancel{(ce^t)^2}}{(1-ce^t)^2}$$

   $$= \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2} \qquad \rightarrow \qquad y' = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}$$

   $$\Rightarrow y' - \frac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{(1+ce^t)^2}{(1-ce^t)^2} - 1\right]$$

$$= \frac{4ce^t}{2(1-ce^t)^2} - \frac{\left(1+ce^t\right)^2}{2(1-ce^t)^2} + \frac{\left(1-ce^t\right)^2}{2(1-ce^t)^2}$$

$$= \frac{4\cancel{ce^t} - \cancel{1} - 2\cancel{ce^t} - \left(\cancel{ce^t}\right)^2 + \cancel{1} - 2ce^t + \left(\cancel{ce^t}\right)^2}{2(1-ce^t)^2}$$

$$= 0$$

4. Verificar que:

   $\mathcal{C}(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}$, es solución de:

   $y' - 2xy = 1$

   Sol.

   $\mathcal{C}'(x) = \left(e^{x^2}\right)'\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)' + e^{x^2}(x^2)'$

   $= 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}.e^{-x^2} + 2xe^{x^2}$

   $\mathcal{C}'(x) = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + 2xe^{x^2} + 1$

   $\Rightarrow$

   $y' - 2xy = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + 2xe^{x^2} + 1 - 2x\left[e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}\right]$

   $= 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + 2xe^{x^2} + 1 - 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt - 2xe^{x^2}$

   $= 1$

   $\therefore$ $\mathcal{C}'(x)$ es solución de la E.D.O.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UNA FAMILIA DE CURVAS

Si se tiene la ecuación de una familia de curvas, se puede obtener su ecuación diferencial mediante la eliminación de las constantes (o parámetros) y ésta se obtiene aislando la constante en un miembro de la ecuación y derivando.
También se puede eliminar la constante derivando la ecuación dada, tantas veces como constantes arbitrarias tenga, y se resuelve el sistema formado con la ecuación original.

EJEMPLOS:

1. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es:
   $y = C_1\cos(x + C_2)$

Sol:
$y' = -C_1 \text{sen}(x + C_2)$

$\Rightarrow y'' + y = -C_1\cos(x + C_2) + C_1\cos(x + C_2)$

$y'' = -C_1\cos(x + C_2)$

$y'' + y = 0$

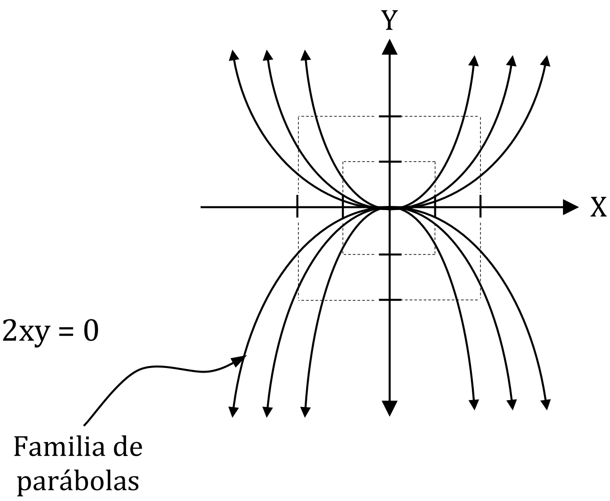
2. Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas que tienen sus vértices en el origen y sus focos en el eje y.
   Sol:
   $x^2 = 4py \rightarrow P = \frac{x^2}{4y}$

   $2x = 4py'$

   $\Rightarrow 2x = \frac{4x^2y'}{4y}$

   $2xy = x^2y' \rightarrow x^2y' - 2xy = 0$

   $\rightarrow xy' - 2y = 0$



3. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es:
   $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, circunferencias de radio fijo **r**, con centro en eje x, si **a**: arbitrario.

   Sol:
   $D_x\left[(x-a)^2 + y^2\right] = D_x\left[r^2\right]$

   $2(x-a)^2 D_x(x-a) + 2y D_x y = 0$

   $2(x-a) + 2y y' = 0 \rightarrow (x-a) + y y' = 0$

   $\rightarrow (x-a) = -y y'$

   $(x-a)^2 + 2(x-a)yy' + (yy')^2 = 0$

   $r^2 - y^2 - 2(yy')^2 + (yy')^2 = 0$

   $r^2 - y^2 - y^2y'^2 = 0$

   $r^2 = y^2 + y^2y'^2$

   $r^2 = (1 + y'^2)y^2$

PROBLEMA DE VALOR INICIAL
Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman ***Condiciones Iniciales***.

PROBLEMA DE VALOR DE FRONTERA
Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida especificadas en dos o más valores de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones de frontera o de contorno.

EJEMPLOS:

1. P.V.I. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 16 - 24t \\ x_{(0)} = 2 \\ x'_{(0)} = 5 \end{cases}$

2. P.V.I. $\begin{cases} y'' = 12x(4 - x) \\ y_{(0)} = 7 \\ y_{(1)} = 0 \end{cases}$

3. P.V.I. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ y_{(1)} = 3 \end{cases}$

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD
Sea la ecuación diferencial:

$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, donde:

1. $f(x, y)$ es continua de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es función continua de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $(x_0, y_0) \in D$, entonces existe una solución única $y = \phi_{(x)}$ definida en un intervalo $|x - x_0| \leq h$, donde h es suficientemente pequeño, que satisface la condición $\phi(x_0) = y_0$.

EJEMPLO:

1. Considere el P.V.I. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ y_{(1)} = 3 \end{cases}$

   $\Rightarrow f(x, y) = x^2 + y^2$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$

- Las dos funciones f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en todo dominio D del plano $x\,y$.
- La condición inicial $y_{(1)} = 3$, significa que $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ y el punto (1, 3) pertenece ciertamente a alguno de tales dominios D.
  Se verifican, por tanto, todas las hipótesis y la conclusión es válida, es decir, existe una solución única ϕ de la ecuación diferencial: $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ definida en el intervalo $|x - 1| \leq$ h alrededor de $x_0 = 1$, que satisface la condición inicial de que $\phi_{(1)} = 3$.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

FORMATOS

$\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x, y)$; $y' = \mathrm{F}(x, y)$; $\mathrm{F}(x, y, y') = 0$

$\mathrm{M}(x, y)dx = \mathrm{N}(x, y)dy = 0$

I. ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

- Aquellas que se pueden escribir en la forma:
  $\mathrm{F}(x)\ \mathrm{G}(y)dx + f(x)\ g(y)dy = 0$

- Se soluciona separando variables:
  $\dfrac{F(x)}{f(x)}\,dx + \dfrac{g(y)}{G(y)}\,dy = 0$

- E integrando:
  $\int \dfrac{F(x)}{f(x)}\,dx + \int \dfrac{g(y)}{G(y)}\,dy = \int 0$ $\rightarrow$ Solución General

Ejemplos:

1. Resolver: $\begin{cases} y' = \dfrac{x+xy^2}{4y} \\ y_{(1)} = 0 \end{cases}$

   Sol:

   $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+xy^2}{4y} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(1+y^2)}{4y} \rightarrow \dfrac{4y}{1+y^2}\,dy = xdx$

   $2\int \dfrac{2y}{1+y^2}\,dy = \int xdx \rightarrow 2\,Ln(1+y^2) = \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{C}$

   $2\,Ln(1) = \dfrac{2}{1} + \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C} = \dfrac{-1}{2}$

$$2\,Ln(1+y^2) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$4\,Ln(1+y^2) = x^2 - 1 \qquad \rightarrow \qquad x^2 - 4\,Ln(1+y^2) - 1 = 0$$

2. Resolver:
$(x+4)(y^2+1)dx + y(x^2+3x+2)dy = 0$

Sol:

$$\frac{x+4}{x^2+3x+2}\,dx + \frac{y}{y^2+1}\,dy = 0$$

$$\int \frac{x+4}{x^2+3x+2}\,dx + \int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \int 0$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}(2x+3)+\frac{5}{2}}{x^2+3x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}\,dy = \text{C}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+2} + \frac{1}{2}\,Ln\,(y^2+1) = \text{C}$$

$$\frac{1}{2}\,Ln\,(x^2+3\text{x}+2) + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\,Ln\,(y^2+1) = \text{C}$$

$$\frac{1}{2}\,Ln\,(x^2+3\text{x}+2) + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right| + \frac{1}{2}\,Ln\,(y^2+1) = \text{C}$$

$$\frac{1}{2}\,Ln\,(x^2+3\text{x}+2) + \frac{5}{2}\,\text{Ln}\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + \frac{1}{2}\,Ln\,(y^2+1) = \text{C}$$

$$Ln\,|x^2+3x+2| + 5\,Ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + Ln\,(y^2+1) = \text{C}$$

$$Ln\left|\frac{(x^2+3x+2)(x+1)^5(y^2+1)}{(x+2)^5}\right| = Ln\,\text{C}$$

$$\rightarrow\ \frac{(x^2+3x+2)(x+1)^5(y^2+1)}{(x+2)^5} = \text{C}$$

$$\rightarrow\ \frac{(x+2)(x+1)(x+1)^5(y^2+1)}{(x+2)^5} = \text{C}$$

$\rightarrow\ (x+1)^6(y^2+1) = \text{C}\,(x+2)^4$ → Solución General

II. ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

- La función *f(x, y)* es *homogénea de grado n*, si:
  $f(dx, dy) = \alpha^n f(x, y)$; $n \in \mathbb{Z}_0^+$.
- $\mathrm{M}(x, y)dx + \mathrm{N}(x, y)dy = 0$, es homogénea, sí y sólo sí, $\mathrm{M}(x, y)$ y $\mathrm{N}(x, y)$ son homogéneas del mismo grado.
- y' = $\mathrm{F}(x, y)$ es homogénea, sí y sólo sí, $\mathrm{F}(x, y)$ es homogénea de grado cero.
- Estas ecuaciones se resuelven reduciéndolas al tipo de variable separable mediante la transformación o cambio de variable.
  $y = \mathrm{V}_{(x)}\, x$ o $x = \mathrm{V}y$

Ejemplos:

1. **Resolver:**
   $\left[y + x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx - xdy = 0$

   Sol:

   * $\mathrm{M}(x, y) = y + x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

   $\rightarrow \quad \mathrm{M}(\alpha x, \alpha y) = \alpha y + \alpha x\cos^2\left(\frac{dy}{dx}\right)$

   $\mathrm{M}(\alpha x, \alpha y) = \alpha \mathrm{M}(x, y)$

   $\mathrm{N}(x, y) = -x \rightarrow \mathrm{N}(\alpha x, \alpha y) = -\alpha x = \alpha \mathrm{N}(x, y)$
   $\rightarrow \mathrm{N}(\alpha x, \alpha y) = \alpha \mathrm{N}(x, y)$
   $\therefore$ La E.D.O. es homogénea.

   * Usar $y = \mathrm{V}x \quad \rightarrow \quad dy = \mathrm{V}dx + xdv \quad \rightarrow \quad \mathrm{V} = \frac{y}{x}$

   Reemplazando:
   $[vx + x\cos^2 v]dx - x(vdx + xdv) = 0$

   $x(v + \cos^2 v)dx - xvdx - x^2 dv = 0$

   $x(v + \cos^2 v - v)dx - x^2 dv = 0$

   $x\cos^2 v dx - x^2 dv = 0$

   $\frac{x}{x^2} dx - \frac{1}{\cos^2} dv = 0$

   $\frac{1}{x} dx - \sec^2 v dv = 0$

   $\int \frac{1}{x} dx - \int \sec^2 v dv = \int 0 \quad \rightarrow \quad Lnx - tgv = \mathrm{C}$

   $\rightarrow \quad Lnx - tg\left(\frac{y}{x}\right) + \mathrm{C} = 0 \quad \rightarrow$ Solución General

2. Resolver:
   $x^3dx + (y+1)^2dy = 0$

   Sol:

   $\int x^3dx + \int (y+1)^2dy = \int 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^4}{4} + \frac{(y+1)^3}{3} = C$

   $3x^4 + 4(y+1)^3 = C \quad \rightarrow$ Solución General

3. Resolver:
   $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$

   Sol:
   $\int \frac{x^2}{x-1}\, dx + \int \frac{y^2}{y+1}\, dy = \int 0$

   $\int \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}\, dx + \int \frac{(y-1)(y+1)+1}{y+1}\, dy = C$

   $\int (x+1)dx + \int \frac{dx}{x-1} + \int (y-1)dy + \int \frac{dy}{y+1} = C$

   $\frac{x^2}{2} + x + Ln\,|x-1| + \frac{y^2}{2} - y + Ln\,|y+1| = C$

   $x^2 + 2x + 2Ln|x-1| + y^2 - y + Ln|y+1| = C$

   $x^2 + y^2 + 2x - 2y + Ln(x-1)^2(y+1)^2 = C$

   Solución General.

4. Resolver:
   $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}$

   Sol:
   $\int \frac{y-3}{y}\, dy = \int \frac{4}{x} dy \quad \rightarrow \quad \int dy - 3\int \frac{dy}{y} = 4\int \frac{1}{x} dx$

   $y - 3Lny = 4Lnx + C$

   $4Lnx + 3Lny - y = C \quad \rightarrow \quad Lnx^4y^3 - y = Ln\,C$

   $y = Lnx^4y^3 + Ln\,C \Rightarrow y = Ln\,Cx^4y^3 \Rightarrow e^y = Cx^4y^3$

   Solución General

5. Resolver:
$(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

Sol:

* $\mathrm{M}(x, y) = x^3 + y^3$
$\mathrm{M}(\alpha x, \alpha y) = \alpha^3 x^3 + \alpha^3 y^3 = \alpha^3(x^3 + y^3) = \alpha^3 \mathrm{M}(x, y)$
→ M es homogénea de grado 3.

* $\mathrm{N}(x, y) = 3xy^2$
$\mathrm{N}(\alpha x, \alpha y) = 3\alpha x \alpha^2 y^2 = \alpha^3 3xy^2 = \alpha^3\ \mathrm{N}(x, y)$
→ N es homogénea de grado 3.

* Usar:
$y = vx \quad \rightarrow \quad dy = vdx + x\,dv$
$\Rightarrow$
$(x^3 + v^3x^3)dx - 3xv^2x^2(vdx + xdv) = 0$

$x^3(1 + v^3)dx - 3x^3v^3dx - 3x^4v^2dv = 0$

$x^3(1 + v^3 - 3v^3)dx - 3x^4v^2dv = 0$

$x^3(1 - 2v^3)dx - 3x^4v^2dv = 0$

$$\int \frac{x^3}{x^4}\, dx - \int \frac{3v^2}{1-2v^3}\, dv = \int 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{-6v^2}{1-2v^3}\, dv = \mathrm{C}$$

$$Ln|x| + \frac{1}{2}\, Ln|1 - 2v^3| = Ln\ \mathrm{C}$$

$$2\ Ln|x| + Ln\left|1 - \frac{2y^3}{x^3}\right| = Ln\ \mathrm{C}$$

$$Ln x^2 + Ln\left|\frac{x^3-2y^2}{x^3}\right| = Ln\ \mathrm{C}$$

$$Ln\,\frac{x^2.\ (x^3-2y^3)}{x^3} = Ln\ \mathrm{C} \ \rightarrow\ \frac{(x^3-2y^3)}{x} = \mathrm{C}$$

$\rightarrow x^3 - 2y^3 = \mathrm{C}x$

→ Solución General

6. Resolver:
   $(1 + x^3)dy - x^2ydx = 0$. Si = $x = 1;\ y = 2$

   Sol:
   $\frac{1}{y}\,dy - \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = 0 \rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy - \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx = \int 0$

   $Lny - \frac{1}{3}\,Ln|1 + x^3| = Ln\ \text{C} \rightarrow 3Lny - Ln(1 + x^3) = Ln\ \text{C}$

   $Ln\,\frac{y^3}{1+x^3} = Ln\ \text{C} \rightarrow \frac{y^3}{1+x^3} = \text{C} \quad \rightarrow y^3 = \text{C}\,(1 + x^3)$
   Solución General.

III. CASO ESPECIAL (Reducible a los Casos Anteriores)

* Sea $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_{1y+}\,c_2}{a_2x + b_{2y+}\,c_2}$; $a_i, b_i, c_i: Ctes$

* Si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, La transformación $\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases}$

Convierte a la ecuación en homogénea.

* Los valores de h y k se obtiene resolviendo:
$\begin{cases} a_1h + b_1k + C_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + C_2 = 0 \end{cases}$

* Si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, la ecuación se reduce a variable separable mediante

Z = $a_1x + b_1y$

Ejemplos:

1. Resolver:
   $(x - 2y - 3)dx + (2x + y - 1)dy = 0$

   Sol:
   $\frac{dy}{dx} = \frac{-x+2y+3}{2x+y-1} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$

   Usar: $\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -h + 2k + 3 = 0 \\ 2h + k - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} -2h + 4k + 6 = 0 \\ \quad 2h + k - 1 = 0 \end{cases}$$

$$5k + 5 = 0$$

$$\Rightarrow h = 1$$

$$k = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + 1 \\ y = y_1 - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} dx = dx_1 \\ dy = dy_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left[x_1+1 - 2\left(y_1 - 1\right) - 3\right]dx_1 + \left[2(x_1 + 1) + y_1 - 1 - 1\right] dy_1 = 0$

$\left(x_1 - 2y_1 + 1 + 2 - 3\right)dx_1 + \left(2x_1 + 2 + y_1 - 2\right)dy_1 = 0$

$(x_1 - 2y_1)dx_1 + (2x_1 + y_1)dy_1 = 0$

$\Rightarrow$ Usar: $y_1 = vx_1$

$dy_1 = vdx_1 + x_1dv = 0$

$\Rightarrow (x_1 - 2vx_1)dx_1 + (2x_1 + vx_1)(vdx_1 + x_1dv) = 0$

$(x_1 - 2vx_1 + 2x_1v + v^2x_1)dx_1 + (2x_1 + vx_1)x_1dv = 0$

$x_1(1 + v^2)dx_1 + x_1^2(v + 2)dv = 0$

$\int \frac{x_1}{x_1^2} dx_1 + \int \frac{v+2}{1+v^2} dv = \int 0$

$\Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} + \frac{1}{2} \int \frac{v+2}{1+v^2} dv + \int \frac{2dv}{1+v^2} = \text{C}$

$Ln|x_1| + \frac{1}{2} Ln|1 + v^2| + 2\, arctg(v) = \text{C}$

$2Ln|x_1| + Ln\left|1 + \frac{y_1^2}{x_1^2}\right| + 4\, arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = Ln\, \text{C}$

$Ln\, x_1^2 + Ln\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{x_1^2}\right) + 4\, arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = Ln\, \text{C}$

$Ln(x_1^2 + y_1^2) + 4arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \text{C}$

$Ln[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] + 4\, arctg\left(\frac{y+1}{x-1}\right) = \text{C}$

$Ln(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2) + 4\ arctg\left(\frac{y+1}{x-1}\right) = C$

Solución General

2. Resolver:
$(2x + 3y + 1)dx + \ (4x + 6y + 1)dy = 0$

$y_{(-2)} = 2$

Sol:
$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-3y-1}{4x+6y+1} \ \Rightarrow \ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$

$\Rightarrow z = a_1 x + \ b_1 y$

$z = \ -2x - 3y \qquad \rightarrow \quad dz = \ -2dx - 3dy = \frac{dz+2dx}{-3}$

$(-z + 1)dx + \ [2(2x + 3y) + \ 1]\frac{dz+2dx}{-3} = 0$

$-3(-z + 1)dx + \ (-2z + 1)(dz + 2dx) = 0$

$(3z - 3)dx + \ (1 - 2z)dz + 2(1 - 2z)dx = 0$

$(3z - 3 + 2 - 4z)dx + \ (1 - 2z)dz = 0$

$-(z + 1)dx + \ (1 - 2z)dz = 0$

$\Rightarrow \int -dx + \int \frac{1-2z}{z+1}\,dz = \int 0$

$- x + \ \int \frac{dz}{z+1} - 2\int \frac{zdz}{z+1} = C$

$-x + Ln|z + 1| - 2\int \frac{z+1-1}{z+1}\ dx = C$

$-x + Ln|z + 1| - 2\left[\int dz - \int \frac{1}{z+1}dz\right] = C$

$-x + Ln|z + 1| - \ 2z + 2\ Ln\ |z + 1| = C$

$-x - 2z + 3Ln|z + 1| = C$

$-x - 2(-2x - 3y) + 3Ln|-2x - 3y + 1| = C$

$-x + 4x + 6y + 3Ln|2x + 3y - 1|$ = C

$3x + 6y + 3Ln|2x + 3y - 1|$ = C

$x + 2y + Ln|2x + 3y - 1|$ = C

$\Rightarrow$ - 2 + 4 + $Ln|-4 + 6 - 1|$ = C $\quad\rightarrow\quad$ 2 + $Ln_{(1)}$ = C

$\Rightarrow$ C = 2

$\Rightarrow x + 2y - 2 + Ln|2x + 3y - 1| = 0$

IV. ECUACIONES DIFERENCIALES TOTALES O EXACTAS

- La expresión $\mathrm{M}(x, y)dx$ + $\mathrm{N}(x, y)dy$ es exacta o es una diferencial total, si existe una función $f(x, y)$ tales que:
  df = $\mathrm{M}(x, y)dx$ + $\mathrm{N}(x, y)dy$

  Es decir:
  $$\frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$$

  Donde:
  $$\mathrm{M} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \mathrm{N} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

  La ecuación $\mathrm{M}(x, y)dx$ + N $(x, y)dy$ = 0, es ***exacta*** o en Diferenciales Totales, si y sólo sí, M dx + N dy es una diferencial total.

TEOREMA (Condición de Exactitud)

La ecuación M $(x, y)dx$ + N $(x, y)dy$ = 0 es exacta sí y sólo sí:
$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN

Como df = 0, la solución implícita es $f(x, y)$ = C, donde:
$f(x, y) = \int \mathrm{M}(x, y)dx + \emptyset_{(y)}$ o $f(x, y) = \int \mathrm{N}(x, y)dy + \emptyset_{(x)}$

Ejemplos:

1. Resolver:
   $$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$$

Sol:
Comprobación de Exactitud
$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$

$\mathrm{M}(x,y) = 2xy^{-3} \rightarrow \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = -6xy^{-4}$

$\mathrm{N}(x,y) = y^{-2} - 3x^2y^{-4} \rightarrow \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = -6xy^{-4}$

$\therefore$ My = Nx → E.D.O. exacta

Hallar $f(x,y)$:

$f(x,y) = \int \mathrm{M}(x,y)dx + \emptyset_{(y)}$

$f(x,y) = \int 2xy^{-3}dx + \emptyset_{(y)} = x^2y^{-3} + \emptyset_{(y)}$

$\rightarrow f(x,y) = x^2y^{-3} + \emptyset_{(y)}$

Hallar $\emptyset_{(y)}$:

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^{-3}\right) + \emptyset'_{(y)} \rightarrow y^{-2}$-$3x^2y^{-4} =$ -$3x^2y^{-4} + \emptyset'_{(y)}$

$\frac{d\emptyset}{dy} = y^{-2} \rightarrow \int d\emptyset = \int y^{-2}dy \rightarrow \emptyset_{(y)} = -1y^{-1} \rightarrow \emptyset_{(y)} = -y^{-1}$

$\therefore f(x,y) = x^2y^{-3} - y^{-1} \rightarrow \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = \mathrm{C}$ → Solución General

2. Resolver:
$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0$

Sol:
Comprobación de Exactitud:
$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$

* $\mathrm{M}(x,y) = x^{-2} + 3y^2x^{-4} \rightarrow \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = 6yx^{-4}$

* $\mathrm{N}(x,y) = -2yx^{-3} \rightarrow \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = 6yx^{-4}$

$\therefore$ My = Nx → E.D.O. Exacta

Hallar $f(x, y)$:

$f(x, y) = \int \mathrm{N}(x, y)dy + \emptyset_{(x)}$

$f(x, y) = \int -2x^{-3}ydy + \emptyset_{(x)} = -x^{-3}y^2 + \emptyset_{(x)}$

$f(x, y) = -x^{-3}y^2 + \emptyset_{(x)}$
Hallar $\emptyset_{(x)}$:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(-x^{-3}y^2)}{\partial y} + \emptyset'_{(x)} \rightarrow \mathrm{M}(x, y) \ = 3x^{-4}y^2 + \emptyset'_{(x)}$

$x^{-2} + 3y^2x^{-4} = 3x^{-4}y^2 + \emptyset'_{(x)} \rightarrow \ \emptyset'_{(x)} = x^{-2}$

$\rightarrow \int d\emptyset = \int x^{-2}dx$

$\rightarrow \ \emptyset'_{(y)} = -\ x^{-1}$

$\rightarrow \emptyset_{(y)} = -y^{-1}$ $\Rightarrow f(x, y) = -x^{-3}y^2 - x^{-1}$

$\therefore -\ \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x^3} = \mathrm{C}$ $\rightarrow$ Solución General

V. FACTOR INTEGRANTE

* Si $\mathrm{M}(x, y)dx + \mathrm{N}(x, y)dy = 0$, no es exacta, entonces la función $u(x, y)$, tales que:
$u(x, y)\ \mathrm{M}(x, y)dx + u(x, y)\ \mathrm{N}(x, y)dy = 0$ ………….. (*)

Sea exacta, se llama factor ***Integrante de la Ecuación.***

* Si la ecuación (*) es exacta, entonces satisface el criterio de exactitud.

$$\frac{\partial}{\partial y}[u(x, y)\mathrm{M}(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[u(x, y)\mathrm{N}(x, y)]$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \mathrm{M} + u \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \mathrm{N} + u \cdot \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$$

$$\mathrm{M} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \mathrm{N} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) u$$

Esta última ecuación en derivadas parciales determinará el factor integrante $u(x, y)$.

Casos Particulares:

1. Si: $\frac{My-Nx}{N} = f(x)$, entonces $u = e^{\int f(x)dx}$ es Factor Integrante de E.D.O.

2. Si: $\frac{Nx-My}{M} = g(y)$, entonces $u = e^{\int g(y)dy}$ es Factor Integrante de E.D.O.

Ejemplos:

1. Resolver: $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$

   Sol:
   Exactitud:
   $M(x, y) = 2x^2 + y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$

   $N(x, y) = x^2y - x \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$

   $\therefore$ E.D.O. no es exacta.

   $\Rightarrow \frac{My-Nx}{N} = f(x) \Rightarrow \frac{1-2xy+1}{x^2y-x} = \frac{2(1-xy)}{-x(1-xy)}$
   $\Rightarrow f(x) = \frac{-2}{x}$

   $\rightarrow u = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2Lnx} = e^{Lnx^{-2}}$
   $\rightarrow u_{(x)} = x^{-2}$
   $\rightarrow x^{-2}(2x + y)dx + x^{-2}(x^2y - x)dy = 0$

   $(2 + x^{-2}y)dx + (y - x^{-1})dy = 0 \quad \rightarrow$ E.D.O. Exacta

   $\Rightarrow f(x) = \int (2 + x^{-2}y)dx + \emptyset_{(y)} = 2x - x^{-1}y$

   $\rightarrow f(x, y) = 2x - x^{-1}y + \emptyset_{(y)}$

   $\Rightarrow \frac{df}{dy} = -x^{-1} + \emptyset'_{(y)} \rightarrow y - x^{-1} = -x^{-1} + \frac{d\emptyset}{dy}$

   $\rightarrow \int d\emptyset = \int y dy$

   $\emptyset = \frac{y^2}{2} + C$

$\Rightarrow f(x,y) = 2x - x^{-1}y + \dfrac{y^2}{2}$

$2x - x^{-1}y + \dfrac{y^2}{2} + \text{C} = 0 \quad \rightarrow$ Solución General

2. Resolver:
   $(2x + tgy)dx + (x - x^2 tgy)dy = 0$

   Sol:

   $\text{M}(x,y) = 2x + tgy \;\rightarrow\; \dfrac{\partial \text{M}}{\partial y} = sec^2 y$

   $\text{N}(x,y) = x - x^2 tgy \;\rightarrow\; \dfrac{\partial \text{N}}{\partial x} = 1 - 2xtgy$

   $\Rightarrow f(x) = \dfrac{\text{M}y - \text{N}x}{\text{N}}$

   $\rightarrow \dfrac{sec^2 y - 1 + 2xtgy}{x - x^2 tgy} = \dfrac{1 + tg^2 y - 1 + 2xtgy}{x - x^2 tgy}$

   $= \dfrac{tgy(tgy + 2x)}{x(1 - xtgy)}$

   $\Rightarrow \dfrac{\text{N}x - \text{M}y}{\text{M}} = \dfrac{1 - 2xtgy - sec^2 y}{2x + tgy} = \dfrac{1 - 2xtgy - tg^2 y - 1}{2x + tgy}$

   $= \dfrac{-tgy(2x + tgy)}{(2x + tgy)} \rightarrow f(x,y) = -tgy$

   $\rightarrow\; u = e^{\int -tgydy} = e^{-Ln|secy|}$

   $u = \dfrac{1}{secy} = Cosy \quad \rightarrow u = sec^{-1}y$

   $(2xcosy + seny)dx + (xcosy - x^2 seny)dy = 0$
   $\rightarrow$ E.D.O. Exacta

   $\Rightarrow f(x,y) = \int (2xcosy + seny)dx + \emptyset_{(y)}$

   $f(x,y) = \dfrac{2x^2}{2} cosy + xseny + \emptyset_{(y)}$

   $f(x,y) = x^2 cosy + xseny + \emptyset_{(y)}$

$\Rightarrow \dfrac{df}{dy} = - x^2 seny + xcosy + \emptyset'_{(y)}$

$xcosy - x^2 seny = xcosy - x^2 seny + \emptyset'_{(y)}$

$\rightarrow \emptyset'_{(y)} = 0 \rightarrow \emptyset_{(y)} = C$

$\therefore f(x, y) = x^2 cosy + xseny + C$

$\therefore x^2 cosy + xseny + C = 0$ $\rightarrow$ Solución General

ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

- La ecuación de la forma: $y' + P_{(x)} y = g_{(x)}$ se llama ecuación lineal de primer orden.
- La solución general de esta ecuación es:
  $y_{(x)} = e^{-\int P_{(x)} dx} \left[\int e^{\int P_{(x)} dx} \cdot g_{(x)} dx + c\right]$
- La ecuación no lineal:
  $y' + P_{(x)} y = g_{(x)} y^n$; $n \neq 0,1$
  Se llama ***Ecuación Bernoulli***, se reduce a la forma lineal de Primer Orden mediante Z = y^{1-n}
- La ecuación No Lineal:
  $y' + P_{(x)} y = g_{(x)} + r_{(x)} y^2$
  Se llama ***Ecuación de Riccatti***, se reduce al tipo ***Bernoulli*** mediante:
  $y = Z_{(x)} + y_1(x)$ o $y = \frac{1}{Z(x)} + y_1(x)$

Ejemplos:

1. Resolver: $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$
   Sol:
   $y = e^{-\int 2xdx} \left[\int e^{\int 2xdx} \cdot 4xdx + c\right]$

   $y = e^{-\frac{2x^2}{2}} \left[\int e^{x^2} \cdot 4xdx + c\right] = e^{-x^2} \left[2e^{x^2} + c\right]$

   $y(x) = 2 + C\, e^{-x^2}$ $\rightarrow$ Solución General
2. Resolver:
   $x \dfrac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

   Sol:
   $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$

$y(x) = e^{-\int -\frac{y}{x}dx}\left[\int e^{\int -\frac{1}{x}dx}(x^2+3x-2)dx + c\right]$

$= e^{Lnx}\left[\int e^{Lnx^{-1}}(x^2+3x-2)dx + c\right]$

$= x\,[\int x^{-1}(x^2+3x-2)dx + c]$

$= \ x\ \left[\int\left(x+3-\frac{2}{x}\right)dx + c\right]\ =\ x\ \left[\frac{x^2}{2}+3x-2Lnx+c\right]$

$y(x)\ = \dfrac{x^3}{2} + 3x^2 -\ 2xLnx + \text{C}\,x$ → Solución General

3. Resolver: $2xy' =\ 10x^3y^5 + y$

Sol:

$Z =\ y^{1-5} \rightarrow\ Z =\ y^{-4}\ \rightarrow\ \dfrac{dz}{dx}\ =\ -4y^{-5}\,\dfrac{dy}{dx}$

→ Multiplicando E.D.O. por: $-2y^{-5}$

$-4y^{-5}y' =\ -20x^2 - 2y^{-4}\ \rightarrow\ \dfrac{dz}{dx} = -20x^3 - 2z$

$\dfrac{dz}{dx} + \ \dfrac{2}{x}\,\text{z}\ = -20x^2$

$\Rightarrow \text{Z} = e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int e^{\int\frac{2}{x}}.-20x^2dx + C\right]$

$\Rightarrow Z = e^{-lnx^2}[-4x^5 + C]$; pero $Z = y^{-4}$

$\Rightarrow y^{-4} = -4x^3 + Cx^{-2}$ → Solución General